Le paradoxe de Bertrand

On a trois boites identiques. La première contient 2 billes vertes, la deuxième une bille verte et une bille rouge, la troisième deux billes rouges. On tire au hasard l'une des boites (avec égales probabilités) et dans cette boite on prend au hasard une des deux billes (aussi avec égales probabilités).

1. *Si on constate que la bille tirée est rouge, quelle est la probabilité que l'autre bille dans la même boite soit rouge ?*

On a cette fois $n+1$ boites contenant chacune n billes ($n \geq 2$). Pour $0 \leq k \leq n$, la boite numéro k contient k billes rouges et $n-k$ billes vertes. On tire de même une des boites au hasard puis une des billes dans cette boite (chaque fois de façon équiprobable).

2. *Constatant que la bille tirée est rouge, si on tire au hasard une deuxième bille dans la même boite (sans y avoir replacé la première bille tirée), quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?*

1. La probabilité que l'autre bille soit rouge est 2/3.
Il y a au total trois billes vertes et trois billes rouges. Supposons que la boite B_0 contiennent les billes vertes (V_1, V_2) ; la boite B_1, les billes verte et rouge (V_3, R_1) ; la boite B_2, les billes rouges (R_2, R_3).
Les 6 billes ont une chance égale d'être tirées. Sachant que la bille tirée est rouge, il s'agit de R_1, R_2 ou R_3 avec probabilité 1/3.
Dans 2 cas sur 3 (pour R_2 et R_3), l'autre bille dans la même boite est rouge. La probabilité cherchée est donc 2/3.

2. La probabilité que l'on tire une bille rouge dans la même boite est 2/3.
On a $n(n+1)$ billes, donc $n(n+1)/2$ billes rouges équiprobables.
Dans la boite B_0, il n'y a que des billes vertes. Dans la boite B_1, il y a une seule bille rouge. Si elle a été tirée, il n'en reste plus. Dans la boite B_2 il y a 2 billes rouges et $n-2$ billes vertes. Pour chacune des deux billes rouges tirées, on a une probabilité $1/(n-1)$ d'en tirer une seconde, ce qui donne pour cette boite une probabllité $2/(n-1)$ de tirer une seconde bille rouge. Plus généralement, dans la boite B_k qui contient k billes rouges, on aura une probabilité $k(k-1)/(n-1)$ de tirer une seconde bille rouge.
La probabilité totale de tirer une seconde bille rouge dans la même boite est donc :

$$\frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{n-1} = \frac{2}{n(n+1)(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k \right)$$

Comme $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ et $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$, la probabilité est :

$$\frac{2}{n(n+1)(n-1)} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right] = \frac{2}{n-1} \, \frac{2n+1-3}{6} = \frac{2}{3}$$

Remarque : Le problème pourrait être traité plus savamment en utilisant la notion de probabilité conditionnelle. Par exemple pour le cas de la question 1, la probabilité de trouver une 2ème bille rouge dans la même boite où on vient de tirer une bille rouge est égale à la probabilité de trouver deux billes rouges dans une même boite (égale à 1/3) divisée par la probablité de tirer une bille rouge (égale à 1/2). On obtient bien 2/3.

Pourquoi " paradoxe " ?
C'est sans doute parce qu'il est facile de faire un faux raisonnement. Par exemple, sachant qu'on a tiré une boule rouge, ça signifie qu'on a tiré soit $B_1 = (V_3, R_1)$, soit $B_2 = (R_2, R_3)$. Comme on a enlevé une bille rouge, seule B_2 convient pour avoir une deuxième bille rouge, d'où une probabilité 1/2. Cherchez l'erreur !
Le fait que l'on retrouve la même probabilité 2/3 dans le cas plus général de la question 2 est plus étonnant et paradoxal !

Note historique :
Cette question de probabilité (pour le cas de trois boites et six billes) a été formulée par Joseph Bertrand (*Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1889), sans doute pour montrer que la théorie des probabilités était bien moins avancée à cette époque que les autres branches des mathématiques (algèbre, analyse, géométrie, etc.).

Joseph Louis François Bertrand (1822-1900) est un mathématicien français, également économiste, physicien, historien des sciences. Il fait de brillantes études : deux baccalauréats (sciences et lettres), premier au concours de l'Ecole Polytechnique, premier au concours d'agrégation des lycées, Ecole des Mines, thèse sur la théorie mathématique de l'électricité.

Il est d'abord professeur de mathématiques au lycée Saint-Louis, puis à l'Ecole Polytechnique (calcul différentiel et intégral), ainsi qu'à l'Ecole Normale. En 1962, il est titulaire de la chaire de physique et mathématiques au Collège de France.

Il entre à l'Académie de Sciences (géométrie) en 1856 et en devient secrétaire perpétuel en 1874. En 1884, il est élu à l'Académie Française.

Joseph Bertrand s'est intéressé à de nombreux domaines : électricité, thermodynamique, phénomènes thermo-mécaniques, arithmétique, calcul des probabilités, calcul différentiel et intégral, histoire des sciences (Pascal, Copernic, Tycho Brahé, Képler, Galilée, Newton,...

En 1845, en analysant une table de nombres premiers jusqu'à 6 000 000 (étonnant pour l'époque !), il fait la conjecture qu'il y a toujours un nombre premier entre n et 2n pour tout entier n $\geq$ 2. La propriété sera démontrée cinq ans plus tard par Pafnouti Tchebychev.