Principe des tiroirs : pensez à la tangente !

Essayez de résoudre cette petite énigme combinatoire d'apparence inoffensive : montrer que, dans tout ensemble E de cinq nombres réels, il en existe deux, a et b, tels que $0 < \frac{a-b}{1+ab} < 1$.

Les techniques usuelles de l'arithmétique, de la combinatoire ou encore de l'analyse ne vous permettront pas de résoudre immédiatement cette innocente question. Dès lors, pensez à un changement de variable ! Mieux : la forme du quotient $\frac{a-b}{1+ab}$ vous évoquera peut-être la trigonométrie. Eh oui : un changement de variable trigonométrique s'impose.

Solutions

En posant $a = \tan \alpha$ et $b = \tan \beta$, avec α et β dans $]-\pi/2, \pi/2[$, les deux inégalités demandées se reformulent ainsi : $0 < \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} < 1$, soit encore

$0 < \tan(\alpha - \beta) < 1$.

Or, $\tan(0) = 0$ et $\tan(\pi/4) = 1$. Donc $0 < \frac{a-b}{1+ab} < 1$ équivaut à $0 < \alpha - \beta < \pi/4$.

Mais α et β appartiennent à $]-\pi/2, \pi/2[$, qui est de longueur π ; on découpe cet intervalle ainsi : $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[= \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right[\cup \left[-\frac{\pi}{4},0\right[\cup \left[0,\frac{\pi}{4}\right[\cup \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$. Comme E contient cinq nombres, par le principe des tiroirs, au moins deux des cinq angles correspondant aux tangentes de ces points se trouvent dans le même sous-intervalle. Le résultat est établi.

On a utilisé le fait que la fonction tangente est bijective et strictement croissante de $]-\pi/2, \pi/2[$ dans l'ensemble des nombres réels.