.

Problème de voisinage

On a n cases ($n \geq 3$) alignées et numérotées de 1 à n.

1. *Deux cases i et j sont dites "voisines" si* $\text{abs}(i-j) = 1$. *On veut colorier ces cases en noir (N) ou blanc (B) de sorte que chaque case N ait exactement 2 cases voisines B et que chaque case B ait exactement 1 case voisine N.*

Pour quelles valeurs de n est-ce possible ?

2. *On étend la notion de voisinage : deux cases i et j sont dites "voisines" si* $\text{abs}(i-j) \leq 2$. *On veut colorier ces cases en noir (N) ou blanc (B) de sorte que chaque case N ait 2 ou 4 cases voisines B et que chaque case B ait 1 ou 3 cases voisines N.*

Pour quelles valeurs de n est-ce possible ?

1. C'est possible pour $n = 3\,k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Sauf pour la première et la dernière case, cela revient à dire qu'une case N doit être entourée de 2 cases B et qu'une case B doit être entourée d'une case N et d'une case B. La première case ne peut pas être N : en effet, que l'on mette B ou N sur la seconde case, elle n'aurait pas deux voisines B. Ayant donc placé B sur la première case, il n'y a alors qu'une seule façon de remplir les cases de gauche à droite en respectant la règle ci-dessus. On obtient :
B N B B N B B N B B N B....
qui est simplement la répétition du triplet B N B. En raison de la symétrie de ce triplet, tout n multiple de 3 est donc possible. On vérifie que $n = 3\,k + 2$ ne convient pas (le N sur la dernière case n'aurait qu'un voisin B), de même pour $n = 3\,k + 1$ (le B sur la dernière case n'aurait pas de voisin N).

2. C'est possible pour $n = 3$, $n = 5k$, $n = 5k + 1$, $n = 5k + 3$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Si l'on fixe les 3 premières cases on peut remplir les cases de façon unique de la gauche vers la droite. Il y a 8 façons de constituer ce triplet, mais cinq d'entre elles ne sont pas admissibles : B B B, N N N (car la première case n'aurait pas de voisine de couleur opposée), N B N et N N B (la première case N n'a qu'une voisine B), B N N (la première case B a 2 voisines N). Il reste 3 triplets à examiner : B B N, B N B, N B B.

a) Le triplet B B N conduit à B B N B B, puis à la répétition de ce quintuplet. Comme il est symétrique, tout n multiple de 5 est donc possible. En testant $n = 5k+i$, $(i = 1, 2, 3, 4)$, on voit que seul $n = 5k + 3$ est possible, par exemple B B N B B B B N.

b) Le triplet B N B conduit à B N B N N, puis à la répétition de ce quintuplet. Les valeurs $n = 5k$ ne sont pas possibles (ce quintuplet n'est pas symétrique) mais les valeurs $n = 5k + 3$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ sont admissibles, par exemple B N B N N B N B.

c) Le triplet N B B conduit à N B B B B, puis à la répétition de ce quintuplet. A nouveau, $n = 5k$ n'est pas possible, mais $n = 5k + 1$ et $n = 5k + 3$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ sont admissibles, par exemple : N B B B B N et N B B B B N B B.

Enfin, les 3 triplets considérés ci-dessus sont admissibles pour $n = 3$.