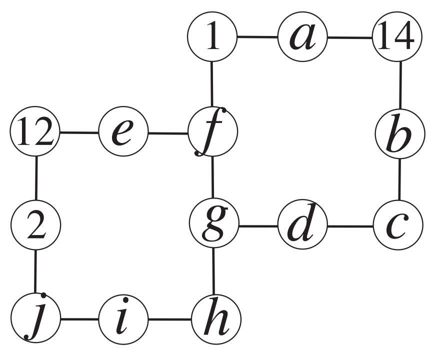
Tangente Éducation 55

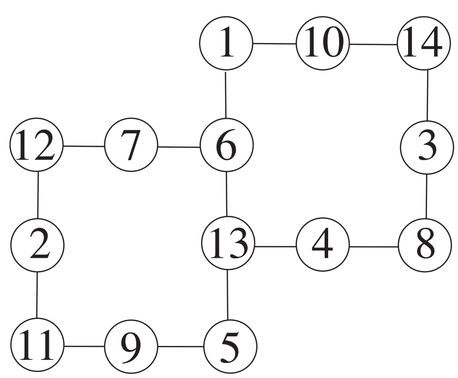
35e championnat des jeux mathématiques

(Solutions)

1. Les deux carrés



On a immédiatement $a = 25 - (1 + 14) = 10$ et $j = 25 - (2 + 12) = 11$.
Les nombres 1 et 2 n'étant plus disponibles, le nombre 13 ne peut être placé qu'en g ou en d. En additionnant les nombres des quatre alignements horizontaux, on obtient $4 \times 25 = 100$, qui est égal à la somme de tous les nombres à l'exception de 2 et b ; or la somme des nombres de 1 à 14 vaut 105, on en déduit que $b = 3$, que $c = 8$ et que $\{g ; d\} = \{4 ; 13\}$. Si $g = 4$, on ne peut compléter l'alignement vertical 1-f-g-h ; On a donc $g = 13$ et $d = 4$. Le reste se complète ensuite de façon univoque.



2. Le nombre mystérieux

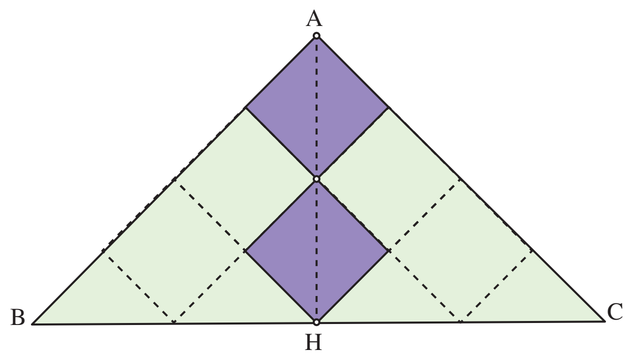
Soit $\overline{ab}$ le résultat obtenu après avoir ajouté 36. Le premier chiffre d'un nombre à deux chiffres n'étant jamais un 0, a et b sont deux nombres entiers compris entre 1 et 9.
On a $10a + b - 2 \times 36 = 10b + a$, d'où $9a = 9b + 72$ et $a = b + 8$.
La seule possibilité est $b = 1$ et $a = 9$. Le nombre cherché est donc égal à 91 – 36, soit **55**. On vérifie que 55 + 36 = 91 et que 55 – 36 = 19.

3. Plié-coupé

Etape	nombre d'épaisseurs	nombre de plis
0	1	0
1	2	1
2	4	1+2 = 3
3	8	1+2+3 = 7
4	16	1+2+3+4 = 15
5	32	1+2+3+4+5 = 31

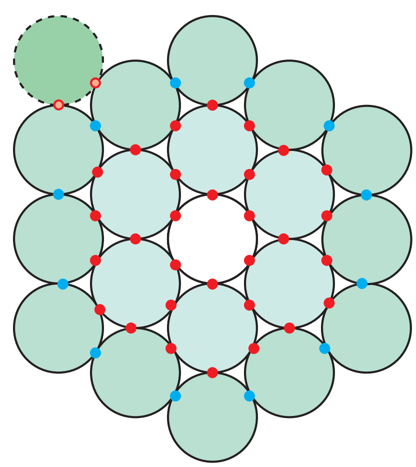
En passant d'une étape à la suivante, on ajoute autant de plis qu'il y a d'épaisseurs de papier. Après avoir plié cinq fois la bande de papier, on obtient donc 32 épaisseurs et 31 plis. En coupant cette bande pliée en 32 épaisseurs en son milieu, on sépare 32 épaisseurs de chaque côté de la coupe, soit 64 morceaux. Mais les 31 plis relient 62 demi-morceaux ; il en reste deux qui sont isolés. On a donc **33 morceaux** au total.

4. Deux carrés dans un triangle



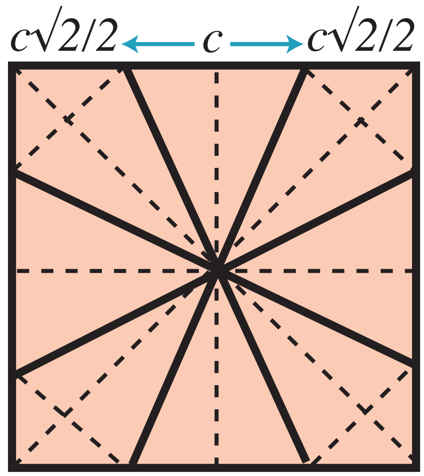
En effectuant le quadrillage de la figure, on observe que chaque petit carré a une aire égale à 1/8 de l'aire du grand triangle.
Si BC = 24 cm, l'aire du triangle ABC est égale à 12^2, c'est à dire à 144 cm^2.
L'aire totale des deux carrés mauves est donc égale à 144/4, soit **36 cm^2**.

5. Points de contact



L'empilement de cercles le plus « compact » sera celui qui fournit le plus de points de contact. En empilant deux couronnes de cercles autour d'un cercle central, on a 19 cercles. Il faut donc en ajouter un vingtième pour satisfaire à la question.
On obtient alors **44 points de contact**. Peux-on faire mieux ?

6. Le partage du gâteau



L'écart entre deux parts sera maximal lorsque les parts seront découpées comme l'indique la figure. Les angles au centre étant tous égaux à 45°, si on ôte les petits triangles des angles, on obtient alors un octogone régulier.
Si l'on désigne par *c* le côté de cet octogone, le surplus de gâteau d'un part d'angle par rapport à une petite part correspondra à un triangle rectangle isocèle dont le côté de l'angle droit mesure $c\sqrt{2}/2$.
La surface du gâteau entier est égale à $[c(1 + \sqrt{2})]^2$, soit $c^2(3 + 2\sqrt{2})$ et la surface du surplus d'une part d'angle à $c^2/4$. Si *m* est la masse du surplus d'une part d'angle, on a $m/500 = (1/4)/(3 + 2\sqrt{2})$, d'où $m = 125/(3 + 2\sqrt{2})$, soit **environ 21,5 grammes**.

7. Une équation en nombres entiers

Le nombre 10 000 est le carré de 100 qui s'écrit d'une façon unique comme somme de deux carrés d'entiers strictement positifs : $100 = 6^2 + 8^2$.
L'égalité de Diophante montre qu'un produit de deux sommes de deux carrés est toujours une somme de deux carrés :
$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac +/- bd)^2 + (ac -/+ bd)^2$.
En remplaçant *a* et *c* par 6 et *b* et *d* par 8, on obtient les égalités :
$100 \times 100 = 100_2 + 0^2$ et $100 \times 100 = 28^2 + 96^2$.
La première est exclue par l'énoncé qui demande des nombres strictement positifs, mais la seconde est solution : **$(x ; y) = (28 ; 96)$**.