Tangente Éducation 58

35^{e} Championnat des jeux mathématiques

(Solutions)

1. 2021, en somme.

Pour le chiffre des unités, on a deux possibilités : sept 3 et aucun 5 ou deux 3 et cinq 5. Le choix de sept 3 est à écarter car la somme des nombres se terminant par un 3 (3, 33, 53, 333, 353, 533 et 553) est inférieure à 2021. Il y a donc deux 3 et cinq 5, ce qui donne une retenue égale à 3 sur les dizaines.
Pour les centaines, il peut y avoir un 3 et trois 5 plus une retenue de 2. Alors, pour les dizaines, on doit totaliser 19, ce qui est possible avec trois 3 et deux 5. D'où une première réponse, 1 + 3 + 2 = 6 chiffres 3 (par exemple 555 + 553 + 535 + 335 + 35 + 5 + 3).
Pour les centaines, il peut aussi y avoir quatre 3 et un 5 plus une retenue de 3. Alors, pour les dizaines, on doit totaliser 29, ce qui est possible avec trois 3 et quatre 5. D'où la seconde réponse, 4 + 3 + 2 = 9 chiffres 3 (555 + 355 + 353 + 335 + 333 + 55 + 35).
Au total, on comptera 6 ou 9 chiffres 3 dans ces sept nombres.

2. Les trios

On utilise une méthode systématique tout en observant certains comportements qui permettent d'accélérer sans lister tous les nombres. De 1 à 9, on a 9 chiffres et de 10 à 99, 180 chiffres. Lorsqu'on écrit 99, chacun des trios 101 et 131 n'est apparu qu'une seule fois auparavant. Les nombres 9 et 180 étant multiples de 3, chacun des nombres à 3 chiffres constituera ensuite un trio. De 100 à 999, chacun de ces deux trios apparaîtra également une seule fois. Ecrivons les premiers trios à partir du nombre 1000 : (100)(0 10)(01 1)(002) (100)(3 10)(04 1)(005) (100)(6 10)(07 1)((008) (100)(9 10)(**10 1**)(011) (**101**)(2 10)(**13 1**)(014) (**101**)(5 10) ... **Le trio (131) a donc été répété seulement 3 fois auparavant.**

3. Carré de cubes

Il n'y a que douze cubes de quatre chiffres: 1000, 1331, 1728, 2197, 2744, 3375, 4096, 4913, 5832, 6859, 8000, 9261.
L'énoncé interdit 1000 et 8000. Aucun cube restant ne commençant par leur dernier chiffre, 1728 et 2197 sont écartés. Puis de même 1331 donne un première réponse car l'énoncé autorise la répétition.
4096 → 6859 → 9261 sont écartés à cause du 1.
2744 → 4913 → 3375 → 5832 (→ 2744) donnent la seconde réponse.
Le plus petit de ces quatre cubes, ou l'un des plus petits, si deux ou plusieurs sont égaux, est 1331 ou 2744.

4. L'aquarium

Soient a, b et c les trois dimensions de l'aquarium.
$ab(c-3) = ac(b-4) = bc(a-5) = 6000$.
Les deux premières égalités donnent $b = 4/5\ a$ et $c = 3/5\ a$.
La troisième donne $a^2(a-5) = 12500$.
Le polynôme du troisième degré admet 25 comme racine.
Il n'a pas d'autre racine réelle car la factorisation de $x^3 - 5x^2 - 12500$ est le produit de $(x-25)$ par $(x^2 + 20x + 500)$ qui n'en n'admet pas.
$b = 20$ et $c = 15$.
$25 \times 20 \times 15 = 7500$.
Le volume de l'aquarium est (exactement) 7500 cm^3.

5. Les sauterelles

Le total le plus grand possible est obtenu lorsque les cinq sauterelles tournent en circuit sur un rectangle 2×3.
La première étape implique une case (appartenant au rectangle précité) sur laquelle est écrit 100 –T, et 58 cases sur lesquelles sont écrits des nombres totalisant T au moins égal à 58.
La seconde étape implique les mêmes 58 cases et une case du rectangle sur laquelle est écrit 1000 – T.
10000 – T, 100000 – T, 1000000 – T et 10000000 – T sont écrits sur les troisième,

quatrième, cinquième et sixième cases du rectangle.
Le total des soixante-quatre nombres écrits sur l'échiquier est ainsi 11111100 – 5T.
Comme il doit être divisible par 35 et le plus grand possible, T = 63 donne la réponse (le quotient est 317451).
Ce total est égal à 11110785.

6. Les aiguilles

En considérant deux carrés accolés et partageant un sommet, l'aire grise est égale à la moitié de celle du petit carré.
Soit a le côté du petit carré et b celui du grand.
L'aire grise est la différence entre $a^2 + b^2$ et la somme des aires triangulaires $a^2 / 2$, $(b - a)b / 2$, $(a + b)b / 2$, c'est-à-dire $a^2 / 2$ effectivement.
L'aire grise est donc la moitié de la somme des aires des deux petits carrés, soit, d'après Pythagore, $350^2 / 2$.
L'aire grise sur le dessin est exactement 61250 mm^2.

7. Les PPCM

En étudiant tous les cas possibles, on peut décomposer le nombre 35 de deux façons qui donnent un PPCM égal à 30 :
15 + 10 + 6 + 3 + 1 ou 15 + 10 + 5 + 3 + 2.
Le PPCM sera égal à 30.