Tangente Éducation 54

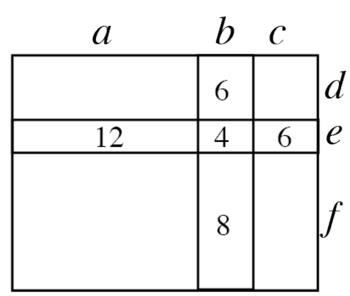
Des problèmes… dans la figure !

(Solutions)

1. Les neuf rectangles

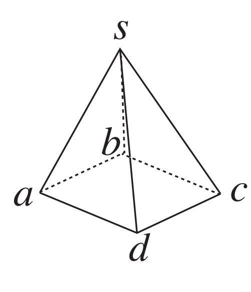
Soient *a, b, c* les largeurs respectives des trois bandes verticales, et *d, e, f,* les largeurs respectives des trois bandes horizontales.
Nous avons : $2(b + d) = 6$; $2(a + e) = 12$; $2(b + e) = 4$; $2(c + e) = 6$ et $2(b + f) = 8$.
On en déduit : $2(a + b + c) = 22 – 6e$ et $2(d + e + f) = 18 – 6b$, d'où l'on tire :
$2(a + b + c + d + e + f) = 40 – 6(b + e) = 40 – 12 = 28$.
Le périmètre du grand rectangle est donc égal à **28 cm**.

On montre que c'est possible avec, par exemple, $a = 5$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 2$, $e = 1$ et $f = 3$.

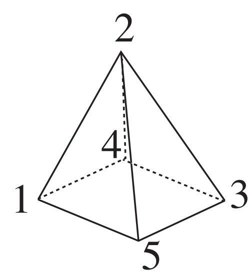


2. La pyramide

Soient *a, b, c, d* les quatre nombres situés aux sommets de la base et *s* le nombre situé au sommet principal de la pyramide.



Le nombre s ne peut être égal à 5, car aucune face ne pourrait avoir 7 pour somme. On en déduit que $11 \leq a + b + c + d \leq 14$, et que la somme manquante est celle correspondant à la base carrée.
Nous avons $4s + 2(a + b + c + d) = 7 + 8 + 9 + 10 = 34$, d'où
$2s + a + b + c + d = 17$.
On a donc $s = 2$ ou 3. Seule la valeur $s = 2$ conduit à une solution et la cinquième somme est égale à **13**.

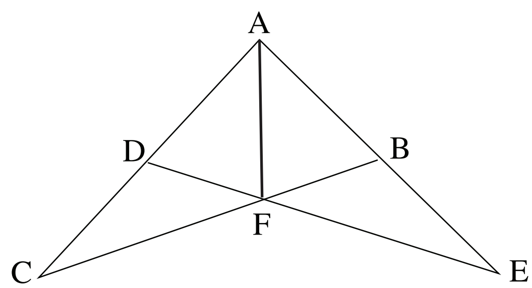


3. À l'eau la bouée

Note : La résolution de ce problème conduisait à une équation du troisième degré, qui n'est pas au programme des lycées. Mais lors de la compétition (par classes) les élèves avaient accès à des outils logiciels mathématiques ou de programmation.

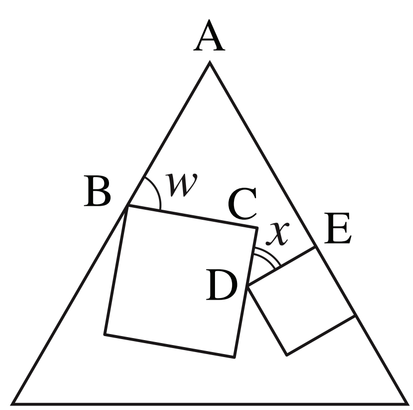
Le volume de la bouée est égal à 1,716/110 = 0,0156 m^3 ou 15,6 dm^3.
Si R désigne le rayon du disque commun aux deux cônes (en dm) et h la hauteur totale de la bouée (en dm), nous avons : $15{,}6 = pR^2h/3$ et $R^2 = 64 - h^2/4$. En remplaçant R^2 dans la première égalité, on obtient : $46{,}8 = ph(64 - h^2/4)$, d'où
$46{,}8/p = h(8 + h/2)(8 - h/2)$.
A l'aide d'un logiciel de programmation ou d'un logiciel de résolution d'équation, on trouve que cette équation possède trois solutions réelles dont les valeurs approchées respectives sont –16,12 ; 0,23 et 15,88.
Seule la valeur **15,88 dm** est à retenir.

4. La condition d'égalité



La figure est symétrique par rapport à (AF) donc l'aire ADF est égale à l'aire ABF et l'aire CDF est égale à l'aire BFE.
L'énoncé donne : 2 × aire ADF = 2 × aire CDF d'où aire ADF = aire CDF.
Comme CDF et ADF ont même hauteur issue de F, leurs aires sont égales quand les bases AD et CD sont égales, d'où D milieu de AC et AC = 2 × AD.
Comme AD = AB on obtient AC = 2AB.
Le rapport demandé vaut donc **1/2**.

5. Deux carrés dans un triangle



La somme des angles d'un pentagone est toujours égale à 540°.
Dans le pentagone ABCDE, nous avons Â = 60°, Ê = 90° et ^C = 270°. On en déduit que ^B + ^D = 540° – (60° + 90° + 270°) = 540° – 420° = 120°, d'où x = 120° – 70° = **50°**.

6. Vacances en Syldavie

Le problème se ramène à trouver quatre entiers positifs impairs a, b, c, d tels que
$63a + 77b + 99c + 239d = 2020$.
On sait que $d \leq 7$ car $9 \times 239 = 2151 > 2020$.

• Supposons que l'on ait $d = 7$.
$63a + 77b + 99c = 347$ ou $7(9a + 11b) = 347 – 99c$.
On a donc $c = 1$ ou 3.
Si $c = 1$, alors $7(9a + 11b) = 248$ qui n'est pas divisible par 7.
Si $c = 3$, alors $7(9a + 11b) = 50$ qui n'est pas non plus divisible par 7.
$d = 7$ ne conduit donc à aucune solution.

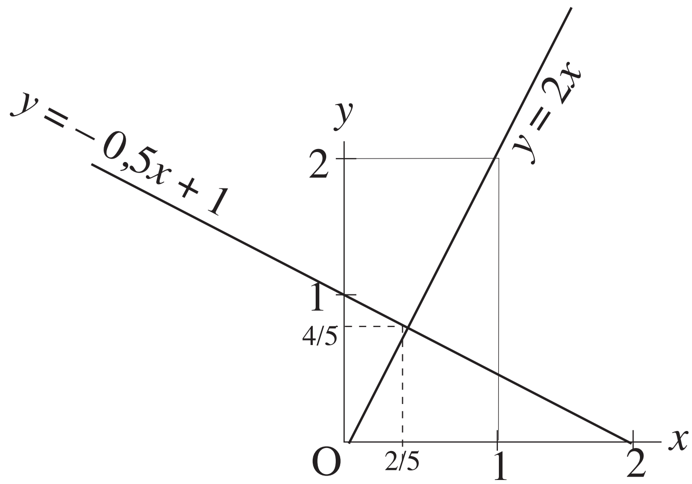
• Supposons que l'on ait $d = 5$.
$63a + 77b + 99c = 825$ ou $11(7b + 9c) = 825 – 63a$.
Le nombre 825 est divisible par 11, mais 63 ne l'est pas, donc a doit être un multiple de 11.
Posons $a = 11a'$.
$7b + 9c = 75 – 63a'$ entraîne $a' = 1$.
Or $7b + 9c = 12$ est impossible.
$d = 5$ ne conduit donc à aucune solution.

• Supposons que l'on ait $d = 3$, alors $63a + 77b + 99c = 1303$ ou
$11(7b + 9c) = 1303 – 63a$.
$1303 = 118 \times 11 + 5$ and $63 = 5 \times 11 + 8$.
$5 – 8a$ et $5 + 3a$ sont donc divisibles par 11.
On en déduit que $a = 13$ car $63(13 + 2 \times 11) > 1303$.
$7b + 9c = 44$.
$b = 5$ and $c = 1$ conduisent à une première solution : **(13 ; 5 ; 1 ; 3)**.

• Supposons que l'on ait $d = 1$, alors $63a + 77b + 99c = 1781$ ou
$11(7b + 9c) = 1781 – 63a$.
$1781 = 161 \times 11 + 10$ and $63 = 5 \times 11 + 8$.
$10 – 8a$ et $10 + 3a$ sont donc divisibles par 11.
On en déduit que $a = 15$ car $63(15 + 2 \times 11) > 1781$.
$7b + 9c = 76$.
$b = 7$ and $c = 3$ conduisent à une seconde solution : **(15 ; 7 ; 3 ; 1).**

7. Ma part d'étoile

Si on utilise un repère orthonormé avec pour centre O le point en bas à gauche du carré, et pour points unités les milieux des côtés du carré, on peut calculer les coordonnées du sommet du petit triangle blanc de sommet O dont l'hypoténuse est portée par l'axe des y. Elles sont solutions du système $\{x/2 + y = 1 ; y = 2x\}$ ce qui donne $(5/2)x = 1$ donc $x = 2/5$ (et par suite $y = 4/5$).



L'aire de ce petit triangle blanc est donc $1 \times (2/5)/2 = 1/5$.
En utilisant les axes de symétrie de la figure on trouve 8 petits triangles blancs isométriques.
L'aire totale blanche est donc 8/5. Mais l'aire du carré est $2^2 = 4$.
L'aire grisée est $4 - 8/5 = 12/5$: la part du carré qu'elle représente est $(12/5)/ 4 = 3/5$ soit un pourcentage de **60% de l'aire du carré**.

8. Un sangaku

a) AB = 4 × 5 = **20 cm**.
b) BC = OH + 10 cm + 5 cm.
En utilisant le théorème de Pythagore, on obtient $OH^2 = OO'^2 - O'H^2 = 15^2 - 5^2 = 200$. On en déduit que $OH = 10\sqrt{2}$, et que **BC = 15 + 10√2**.

9. Le travelator

Lorsque Alphonse prend le travelator dans le sens de la marche, sa vitesse s'ajoute à celle du travelator ; lorsque il prend le travelator dans le mauvais sens, la vitesse du travelator se retranche de la sienne et sa vitesse est plus grande que celle du travelator.
La vitesse d'Alphonse est $u = 5/9$ m/s. Comme la distance parcourue est le produit de la vitesse par la durée, on a donc les équations (en appelant v, la vitesse inconnue du travelator et D sa longueur)
$D = (v + 5/9) \times 18 = (v - 5/9) \times 126$.
On en déduit que $18v + 10 = 70 - 126v$, d'où $144v = 60$ et donc $v = 5/12$ m/s.
La longueur du travelator est donc $D = (5/12 + 5/9) \times 18 = 35/2$ soit **17,5 m**.