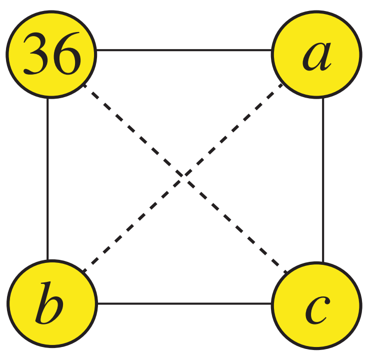
Tangente Éducation 61

Quand le spectacle pose problèmes

(Solutions)

1. Les carrés

L'ensemble des diviseurs propres de 36 autres que 1 est {2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18}. Les nombres *a* et *b* du diagramme de gauche sont deux nombres distincts de cet ensemble. On supposera que $a < b$.



18						
12						
9	24					
6			24			
4		24				
3	24					
b/a	2	3	4	6	9	12

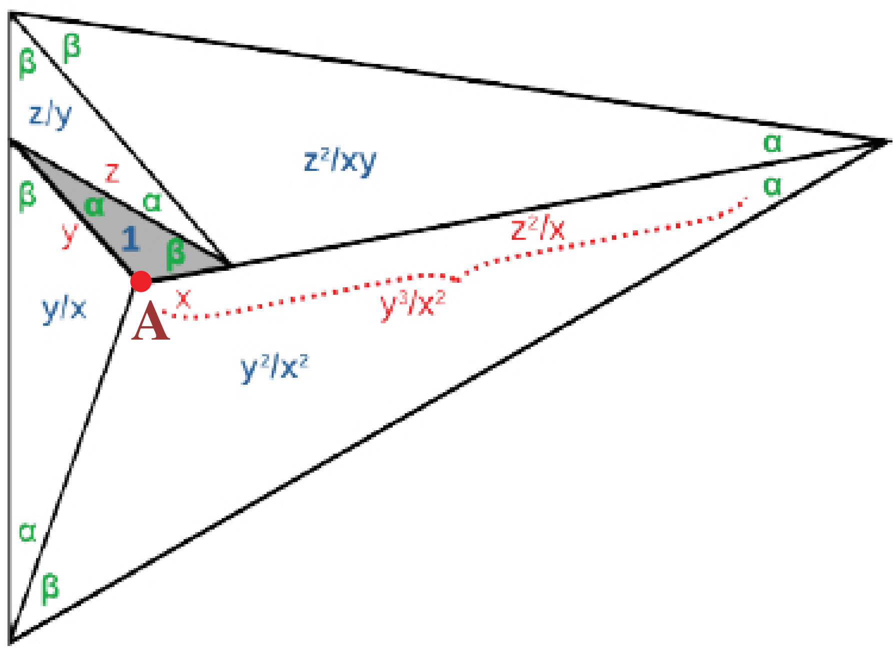
Le tableau de droite indique les valeurs possibles de *c* en fonction de *a* et *b*.
Les cases bleues correspondent aux cas où l'un des nombres *a* ou *b* divise l'autre et les cases rouges aux cas où il n'existe pas de multiple commun de *a* et *b* strictement inférieur à 36 qui ne soit pas un diviseur de 36.
Il reste donc quatre cas possibles où $c = 24$ et où la somme des quatre nombres peut être égale à **65, 67, 70 ou 71**.

2. Le polyèdre de l'année

Soient C le nombre de faces carrées, T le nombre de triangles et P le nombre de pentagones du polyèdre.
Chaque pentagone est entouré de 5 carrés et chaque carré est en contact avec 2

pentagones. On a donc P = 2C/5.
Chaque triangle est entouré de 3 carrés et chaque carré est en contact avec 2 triangles. On a donc T = 2C/3.
D'après la formule d'Euler :
nombre de sommets + nombre de faces = nombre d'arêtes + 2,
soit dans le cas de ce polyèdre : 5P + (P + C + T) = 4C + 2,
ce qui donne 12C/5 + 2C/3 = 3C + 2,
d'où l'on tire C = 30, P = 20 et T = 12.
Le nombre écrit sur chaque face carrée est donc égal à :
[2022 – (12 + 20) × 36] / 30 = **29**.

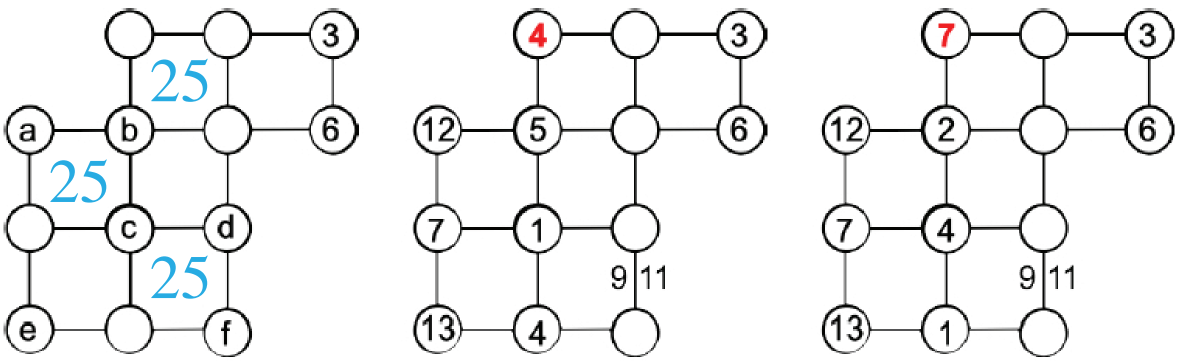
3. L'aire du fanion



Soient a et b les mesures en degrés des angles aigus de chacun des triangles semblables, et soient x, y et z les longueurs des côtés du petit triangle gris. Les trois angles obtus ayant le même sommet sont égaux. Ils mesurent donc 120° et $a + b$ = 60°. On a donc $z^2 = x^2 + y^2 + xy$**.**
Dans chaque triangle on a indiqué en bleu le rapport d'homothétie par rapport au triangle gris.
$y^3/x^2 = x + z^2/x$, d'où $(y/x)^3 - (y/x)^2 - y/x - 2 = 0$, qui a pour solution $y/x = 2$, d'où l'on tire $z/x = \sqrt{7}$.

L’aire du fanion est donc égale à :
$36 \times [1 + (\sqrt{7}/2)^2 + 2^2 + (7/2)^2 + 4^2] = $ **1260 cm².**

4. De un à treize



A B C

La somme des nombres de 1 à 13 est égale à 91. Nous avons donc $e + 3\times 25 - b - c + 3 + 6 = 91$ (diagramme A), d’où $e = b + c + 7$.
De la même façon, on montre que $a + d + f + 3 + 6 + (2 \times 25) = 91$, ce qui donne $a + d + f = 32$.
Si $(e, b, c) = (13, 5, 1)$ ou $(13, 2, 4)$, on obtient les diagrammes B et C où un nombre (en rouge) apparaît en double, d’où une impossibilité.
On a donc $(e, b, c) = (12, 1, 4)$ et $(a, d, f) = (13, 11, 8)$ ou $(13, 10, 9)$, ce qui permet de compléter la grille et d’obtenir l’unique solution.

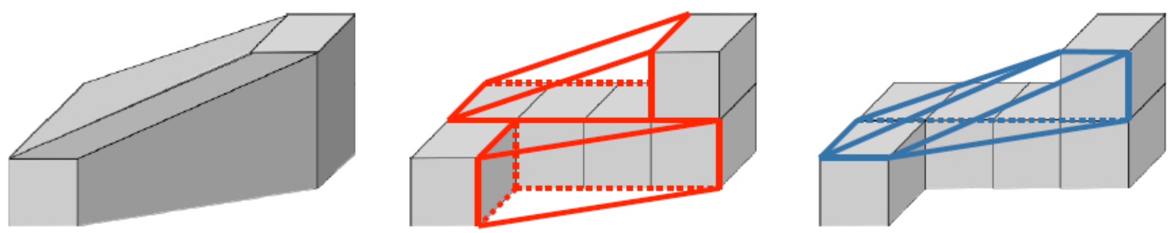
	8	5	3
13	1	11	6
7	4	9	
12	2	10	

5. Jamais deux sans trois

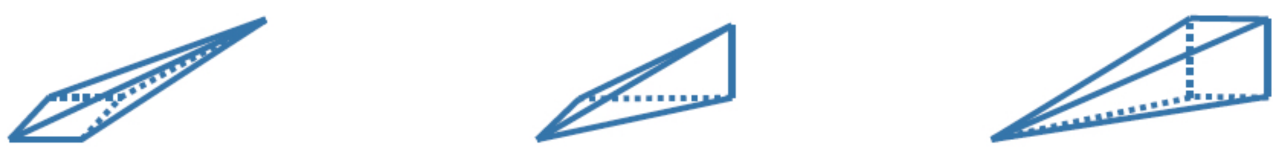
Nous avons $a + b/c = 25$ et $b + a/c = 35$.
Par différence, $(b – a)(c – 1) = 10c$ soit $b = a + 10c /(c – 1)$.
$c – 1$, sans diviseur commun avec c, divise 10.
Si $c = 2$, $b = a + 20$, $a + 20 + a /2 = 35$ donne $a = 10$, $b = 30$
Si $c = 3$, $b = a + 15$, $a + 15 + a /3 = 35$ donne $a = 15$, $b = 30$
Si $c = 6$, $b = a + 12$, $a + 12 + a /6 = 35$ est impossible (7 ne divise pas 23×6).
Si $c = 11$, $b = a + 11$, $a + 11 + a /11 = 35$ donne $a = 22$, $b = 33$.
Le bon résultat, $(a + b)/c$, est donc égal à 20, 15 ou 5.
Il y a 3 solutions : **5, 15 et 20**.

6. L'empaquetage

Prenons le volume d'un petit cube comme unité.

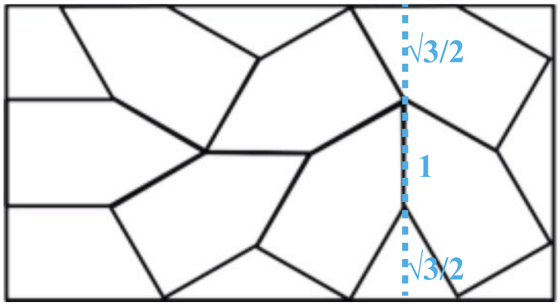


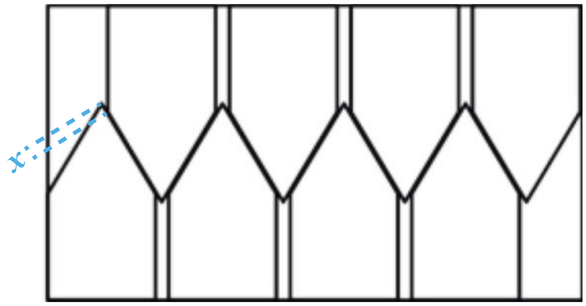
Chacun des deux volumes rouges est égal à 3/2.



Chacun des trois petits volumes bleus est égal à $(1\times1)/3 = 1/3$
Le volume occupé par l'air extérieur entre le bâtiment et le film tendu est donc égal à :
$[(3/2 + 3/2) + (1/3 + 1/3 + 1/3)] \times 5^3 = 4 \times 5^3 =$ **500 m³**.

7. Les coucous





Prenons comme unité de longueur le côté d’un carré ou d’un triangle équilatéral.
Soit x le débordement d’un côté oblique dans le rectangle de droite.
La dimension verticale est égale à $1 + \sqrt{3}$ (rectangle de gauche)
et à $2 + ((1 - x)/2)\sqrt{3}$ (rectangle de droite), d’où l’on tire $x = -1 + 2\sqrt{3}/3$.
La dimension horizontale du rectangle de gauche est égale à $5/2 + 3\sqrt{3}/2$.
La dimension horizontale du rectangle de droite est égale à $9/2 + 7x/2$,
soit $1 + 7\sqrt{3}/3$.
Leur différence est égale à $3/2 - 5\sqrt{3}/6$.
En revenant aux unités de l’énoncé, la dimension verticale est égale à :

$$\frac{(1+\sqrt{3})}{(\frac{3}{2}-(\frac{5}{6})\sqrt{3})} x\, 12 = 24(12+7\sqrt{3}) \approx 579\, mm$$

La dimension verticale des deux rectangles est donc égale à **environ 579 mm.**