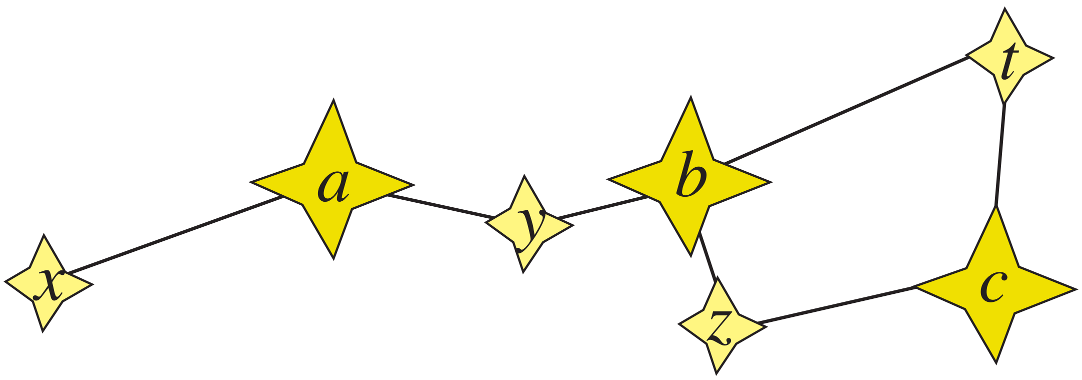
Tangente Éducation 66

Championnat
Les problèmes de la grande finale
(Solutions)

1. La Grande Ourse

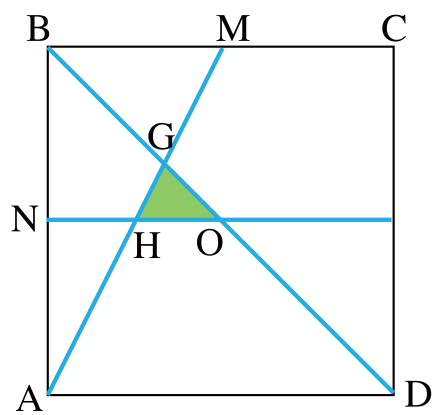


Afin de maximiser les différences, on doit avoir $\{a ; b ; c\} = \{5 ; 6 ; 7\}$.
La somme des différences est égale à :
$(a - x) + (a - y) + (b - y) + (b - z) + (b - t) + (c - z) + (c - t)$,
soit $2a + 3b + 2c - x - 2y - 2z - 2t$.
On maximise cette expression en prenant $b = 7$ et $x = 4$.
On a alors $\{a ; c\} = \{5 ; 6\}$ et $\{y ; z ; t\} = \{1 ; 2 ; 3\}$.
La somme des différences est alors égale à $3 \times 7 + 2(5 + 6) - 4 - 2(1 + 2 + 3)$, soit **27**.
Question subsidiaire : de combien de façons peut-on placer les sept nombres de façons à avoir une somme des différences égale à 27 ?
On peut placer les nombres 5 et 6 de deux façons, et les nombres 1, 2 et 3 de six façons. On a donc au total 12 façons de placer les nombres de 1 à 7 avec une somme des différences égale à 27.

2. Cryptarithme

LAW $\leq$ 987 implique que WROC $\leq$ 1316.
1000 × ¾ = 750 implique WR > 75.
On a donc W = 1 ; R $\in$ {0 ; 1 ; 2 ; 3}.
698 × 4/3 < 1000, d'où L > 6 ; on en déduit que L $\in$ {7 ; 8 ; 9}.
3 × 1ROC = 4 × LA1, d'où C = 8 et L $\in$ {7 ; 9}.
3 × 1RO8 = 4 × LA1 ; on en déduit que O est pair : O $\in$ {0 ; 2 ; 4 ; 6}.
LA1 est multiple de 3, d'où L $\neq$ 7, car A ne pourrait prendre que la valeur 4 et 741 × 4 < 3000.
LA1 $\in$ {921 ; 951 ; 981}, mais seule la valeur 951 fournit une solution :
951 × 4/3 = 1268, d'où **WROCLAW = 1268951**.

3. Le jardin de Mathias



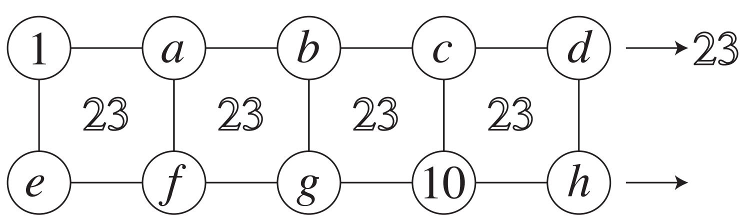
Nous avons NO = AD/2 ; HO = NO/2 = AD/4, d'où aire (HGO) = aire (AGD)/16.
Par ailleurs, GO = GD/4 = OD/3 ; BG = 2BO/3 = 2BD/6 ; BD = 3GD/2.
On en déduit aire (ABD) = 3 × aire (AGD)/2,
d'où aire (ABCD) = 2 × 3 × 16 × aire (HGO)/2 = **480 m^2**.

4. Une suite croissante

de 3 à 7	2^1 = 2 nombres
de 33 à 77	2^2 = 4 nombres
de 333 à 777	2^3 = 8 nombres
de 3333 à 7777	2^4 = 16 nombres
de 33333 à 77777	2^5 = 32 nombres
de 333333 à 777777	2^6 = 64 nombres
de 3333333 à 7777777	2^7 = 128 nombres
de 33333333 à 77777777	2^8 = 256 nombres
de 333333333 à 777777777	2^9 = 512 nombres
3333333333 à 7777777777	2^{10} = 1024 nombres

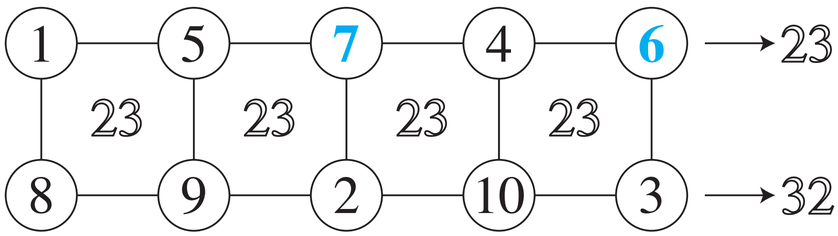
$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 = 2^{11} - 1 = 2047$.
Le 2047^e^ nombre est 7777777777. On montre que le 2015^e^ est 7777733333 : en remplaçant les cinq derniers 7 par des 3, on recule de 2^5 soit 32 nombres. Ensuite, pas à pas, on arrive au 2023^e^, égal à **7777737333.**

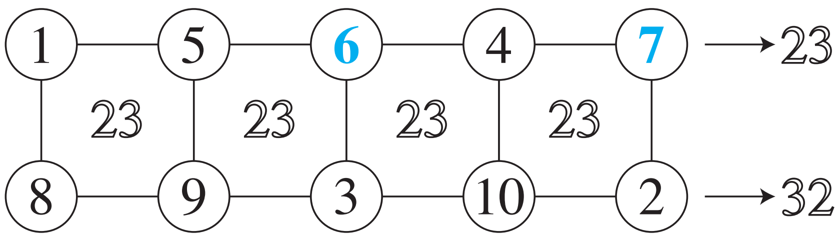
5. De 1 à 10



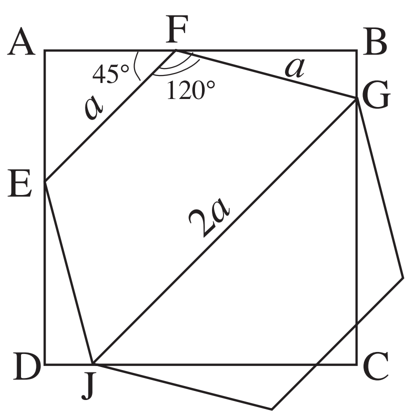
Nous avons : $1 + e = b + g = d + h$; $a + f = c + 10$;
$1 + e + a + f + b + g + c + 10 = 2 \times 23 = 46$;
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$;

$d + h = 55 - 46 = 9$, d'où **e = 8** ;
$a + f + c + 10 = 55 - 3 \times 9 = 28$;
$a + f = c + 10 = 14$, d'où $\boldsymbol{c = 4}$.
$\{a\ ; f\} = \{5\ ; 9\}$; $\{\{b\ ; g\}\ ; \{d\ ; h\}\} = \{\{2\ ; 7\}\ ; \{3\ ; 6\}\}$
$1 + a + b + 4 + d = 23$; $a + b + d = 18$
$a = 9$ est impossible.
La seule possibilité est $a = 5$, d'où $\boldsymbol{\{b\ ; d\} = \{6\ ; 7\}}$; $\boldsymbol{\{g\ ; h\} = \{2\ ; 3\}}$.
On obtient donc **deux solutions.**

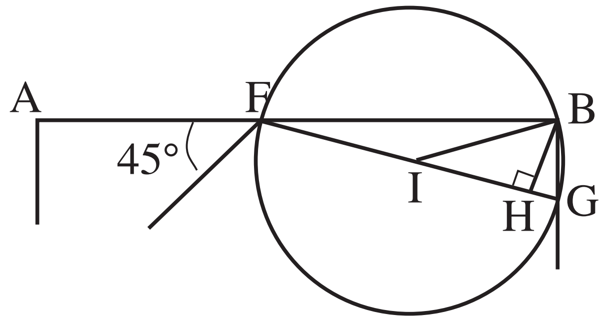




6. Le découpage de Nathalie

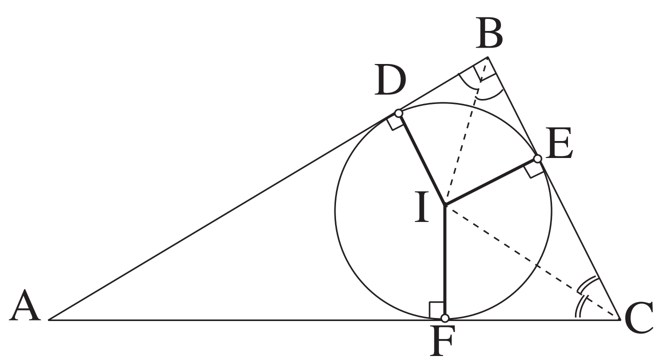


Nous avons : EF = FG = a.
AFE = 45° ; EFG = 120° ; GFB = 15°.
EA = AF = $a\sqrt{2}/2$; area (AFE) = $a^2/4$.
GC = CJ = $a\sqrt{2}$, d'où aire (GCJ) = a^2.



Soit H le pied de la hauteur issue de B dans le triangle FBG et I le milieu de [FG].
IF = IB = IG = $a/2$; BIH = 30° ;
BH = IB/2 = $a/4$, d'où aire (FBG) = FG × BH/2 = $a^2/8$.
On a finalement : aire (AFE) + aire (FBG) + aire (DEJ) + aire (GCJ)
= $a^2/4 + a^2/8 + a^2/8 + a^2 = 3a^2/2 = 216$ cm².
On en déduit : $a^2 = 144$ cm² ; $a = 12$ cm et JG = $2a$ = **24 cm**.

7. Les parcelles du Comte



Le point I est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. IDBE est donc un carré. Nous avons ID = IE = IF = $\sqrt{676}$ = 26 m.
aire (IECF) = IE × EC = 1014 m², d'où CF = EC = 1014/26 = 39 m
et BC = 26 + 39 = 65 m.
Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B, on a $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
En posant AD = AF = x, on obtient : $(x + 39)^2 = (x + 26)^2 + 65^2$,
d'où $26x = 3380$ et $x = 130$.
On en déduit que aire (ADIF) = AF × IF = 130 × 26 = **3380 m²**.